

2022

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-1

Full Marks : 65

*Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.*

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১নং প্রশ্ন এবং প্রতিটি ইউনিট থেকে কমপক্ষে একটি করে প্রশ্ন নিয়ে আরো নয়টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে সঠিক উত্তরটি যথাযথ যুক্তিসহ নির্বাচন করো :

২×১০

(ক) i^i -এর মুখ্য মানটি হল

(অ) $e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}}$, n একটি পূর্ণসংখ্যা

(আ) $e^{-\pi}$

(ই) e^{π}

(ঈ) $e^{-\pi/2}$

(খ) যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α , $-\alpha$ এবং β হয়, তাহলে α^2 -এর মান হবে

(অ) $\frac{r}{p}$

(আ) $-\frac{r}{p}$

(ই) $\frac{p}{r}$

(ঈ) $-\frac{p}{r}$

(গ) যদি নীচের সমসত্ত্ব সমীকরণগুলির সিস্টেমের একটি অশূন্য (nontrivial) সমাধান থাকে :

$$x + \lambda y + 2z = 0, \quad 3x + 2\lambda y + z = 0, \quad 2x + 3y - 4z = 0,$$

তাহলে λ -এর মান হবে

(অ) 0

(আ) 15

(ই) $\frac{15}{2}$

(ঈ) $-\frac{15}{2}$

(ঘ) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির মধ্যে কোন্টি $x = 0$ -তে সন্তত (continuous)?

(অ) $f(x) = \frac{1}{x}$

(আ) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(ই) $f(x) = |x|$

(ঈ) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

Please Turn Over

(ঙ) $f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞায়িত হওয়ার অঞ্চল হল

(অ) $(-1, 1)$

(আ) $[-1, 1]$

(ই) $(0, 1)$

(ঈ) $[0, 1]$

(চ) যদি $2x = 9$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তটির সাপেক্ষে $(2, 0)$ বিন্দুটির Polar হয়, তবে a -এর মান হল

(অ) 1

(আ) 2

(ই) 3

(ঈ) 4

(ছ) সমীকরণ $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ প্রতিনিধিত্ব করে দুটি

(অ) সমান্তরাল সরলরেখা

(আ) coincident সরলরেখা

(ই) লম্ব সরলরেখা

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(জ) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ এই গোলকটির $(6, -3, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক তলটির সমীকরণ হল

(অ) $x - 3y - 2z = 49$

(আ) $6x - 3y + 2z = 49$

(ই) $6x - 3y - 2z = 49$

(ঈ) $x + 4y + 3z = 49$

(ঝ) $y = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$, A, B ধ্রুবক এই বক্রগুলির অবকল সমীকরণটি হল

(অ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(আ) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(ই) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(ঈ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(ঞ) যদি $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$; তাহলে $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x}$ -এর মান হবে

(অ) $\sin u$

(আ) $\cos u$

(ই) $\sin 2u$

(ঈ) $\cos 2u$

ইউনিট - ১

(Algebra - I)

২। (ক) যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cos \frac{n\pi}{4}$ ।

(খ) $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$, যেখানে $\theta, \phi, \alpha, \beta$ সবাই বাস্তব, প্রমাণ করো যে, $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$ ।

৩। ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে সমাধান করো :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + 2z = 6$$

$$3x + 5y - 7z = 14$$

৪। যদি $x^3 - 2x^2 + 4x - 5 = 0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α, β, γ হয়, তবে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করো যার বীজ তিনটি হল

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

ইউনিট - ২

(Differential Calculus - I)

৫। (ক) $f(x)$ অপেক্ষকটি $[0, 2]$ interval-এ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$f; x = 1$ -তে সন্তত (continuous) কি না পরীক্ষা করো।

(খ) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ -এর অস্তিত্ব আছে কি না পরীক্ষা করো।

২+৩

৬। দুটি অপেক্ষকের গুণফলের n th derivative সংক্রান্ত লিবনিজ উপপাদ্যটি বিবৃত করো। এর সাহায্যে প্রমাণ করো যে, যদি

$$y = e^{\tan^{-1} x} \text{ হয়, তবে } (1 + x^2)y_{n+2} + (2nx + x - 1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

১+৪

৭। (ক) দুই চলবিশিষ্ট Homogeneous অপেক্ষকের উপর Euler-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(খ) যদি $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ।

১+৪

৮। প্রমাণ করো যে $y = c \cosh \frac{x}{c}$ -এই বক্রের উপর কোনো বিন্দুতে radius of curvature, ordinate-এর বর্গের সাথে সরল ভেদে আছে।

৫

৯। $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাসমূহের এনভেলোপ নির্ণয় করো, যেখানে $a + b = c$ (c একটি ধ্রুবক, a, b পরিবর্তনশীল ধ্রুবক)।

৫

ইউনিট - ৩

(Differential Equation - I)

১০। (ক) $(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$ অবকল সমীকরণটি Exact কি না পরীক্ষা করো।

(খ) সমাধান করো : $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ । ২+৩

১১। $y = px + \sqrt{1 + p^2}$ -এর সাধারণ এবং একক (singular) সমাধান নির্ণয় করো। ৫

১২। সমাধান করো : $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 24e^{-3x}$ । ৫

ইউনিট - ৪

(Coordinate Geometry)

১৩। $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো। ৫

১৪। $r \cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ কণিকটিকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে,
 $(l \cos \alpha + ep)^2 + l^2 \sin^2 \alpha = p^2$ । ৫

১৫। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত দুটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে তবে দেখাও যে, $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ । ৫

১৬। একটি লম্ব বৃত্তীয় কোণের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত, যার অক্ষ z-অক্ষ, এবং (3, -4, 6) বিন্দুগামী। ৫

১৭। $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ গোলকটির দুটি স্পর্শক তল (tangent plane)-এর সমীকরণ নির্ণয় করো যারা $2x + 2y - z = 0$ এই তলটির সাথে সমান্তরাল। ৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer **question no. 1** and **any nine** questions from the rest,
taking at least **one** question from **each unit**.

1. Choose the correct option from each of the following questions with proper justification : 2×10

(a) The principal value of i^i will be

(i) $e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}}$, n being an integer (ii) $e^{-\pi}$

(iii) e^{π} (iv) $e^{-\pi/2}$.

(b) If α , $-\alpha$ and β be the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then the value of α^2 will be

(i) $\frac{r}{p}$ (ii) $-\frac{r}{p}$

(iii) $\frac{p}{r}$ (iv) $-\frac{p}{r}$.

(c) If the system of homogeneous equations possesses a non-trivial solution :

$$x + \lambda y + 2z = 0, \quad 3x + 2\lambda y + z = 0, \quad 2x + 3y - 4z = 0,$$

then the value of λ will be

(i) 0 (ii) 15

(iii) $\frac{15}{2}$ (iv) $-\frac{15}{2}$.

(d) Which of the following function is continuous at $x = 0$?

(i) $f(x) = \frac{1}{x}$ (ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(iii) $f(x) = |x|$ (iv) $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

(e) The domain of definition of the function $f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x}$ is

(i) $(-1, 1)$ (ii) $[-1, 1]$

(iii) $(0, 1)$ (iv) $[0, 1]$.

(f) If $2x = 9$ is the equation of polar of the point $(2, 0)$ with respect to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$, then the value of a is,

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4.

Please Turn Over

- (g) $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ represents a pair of
- (i) parallel straight lines (ii) coincident straight lines
- (iii) perpendicular straight lines (iv) none of these.
- (h) Equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ at the point $(6, -3, -2)$ is
- (i) $x - 3y - 2z = 49$ (ii) $6x - 3y + 2z = 49$
- (iii) $6x - 3y - 2z = 49$ (iv) $x + 4y + 3z = 49$.
- (i) The differential equation of family of curves $y = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$, where A, B are arbitrary constants is
- (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
- (iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$.
- (j) If $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$; then the value of $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x}$ is
- (i) $\sin u$ (ii) $\cos u$
- (iii) $\sin 2u$ (iv) $\cos 2u$.

Unit - 1

(Algebra - I)

2. (a) If n be a positive integer, prove that $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cos \frac{n\pi}{4}$.
- (b) If $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$, where $\theta, \phi, \alpha, \beta$ are reals, prove that $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$.
2+3
3. Solve by matrix method : 5
- $$\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ x - y + 2z &= 6 \\ 3x + 5y - 7z &= 14 \end{aligned}$$
4. If α, β, γ are roots of the equation $x^3 - 2x^2 + 4x - 5 = 0$, then find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$. 5

Unit - 2

(Differential Calculus - I)

5. (a) A function $f(x)$ is defined on $[0, 2]$ by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Examine if f is continuous at $x = 1$.

- (b) Does the $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ exists? Examine. 2+3

6. State Leibnitz's theorem for the n th derivative of the product of two functions. Use it to prove that if

$$y = e^{\tan^{-1} x}, \text{ then } (1+x^2)y_{n+2} + (2nx+x-1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0. \quad 1+4$$

7. (a) State Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

(b) If $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$, then show that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. 1+4

8. Prove that the radius of curvature at any point of the curve $y = c \cosh \frac{x}{c}$ varies as the square of the ordinate. 5

9. Find the envelope of the lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where $a + b = c$ (c is constant and a, b are parameters). 5

Unit - 3

(Differential Equation - I)

10. (a) Test whether $(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$ is an exact differential equation.

(b) Solve : $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$. 2+3

11. Find the general and singular solution of $y = px + \sqrt{1 + p^2}$. 5

12. Solve : $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 24e^{-3x}$. 5

Please Turn Over

Unit - 4

(Coordinate Geometry)

13. Reduce the equation $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 5
14. If the straight line $r \cos(\theta - \alpha) = p$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$, then show that $(l \cos \alpha + ep)^2 + l^2 \sin^2 \alpha = p^2$. 5
15. If $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents two straight lines equidistant from the origin, then show that $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$. 5
16. Find the equation of the right circular cone whose vertex is at the origin, axis is the z-axis and which passes through the point $(3, -4, 6)$. 5
17. Find the equations of the two tangent planes to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ which are parallel to the plane $2x + 2y - z = 0$. 5
-